Determinación de la distancia y tamaño de la luna a partir de las observaciones de eclipses

Ronald G. Probst
National Optical Astronomy Observatory

1. Introducción.

En esta actividad usaremos las medidas de las veces en que ciertos fenómenos ocurren durante un eclipse lunar para determinar la distancia entre la tierra y la luna, y el tamaño de la luna. Utilizaremos una propuesta desarrollada por antiguos astrónomos griegos hace más de 2000 años. Esta actividad asume que se ha leído el primer trabajo práctico sobre el eclipse, "Observación de un eclipse de luna", y se está familiarizado con el concepto de un eclipse de luna. Esta práctica se puede hacer junto con la primera. El único trabajo adicional durante el eclipse es la cuidadosa observación de la sombra umbral y anotar la hora exacta cuando cruza el centro de la luna, tanto cerca del comienzo como del final del eclipse umbral.

Utilizaremos un método, primero inventado por Aristarco (c. 270 AC) y posteriormente desarrollado por el mejor astrónomo de la Grecia helenística, Hiparco (c. 140 AC). Ellos no contaban con telescopios u ordenadores, sólo sus propios ojos, la habilidad para medir el tiempo y conocimientos de geometría. Nosotros usaremos las mismas herramientas. Utilizaremos dos imágenes diferentes, o **modelos**, de las observaciones de un eclipse. La primera parte de la práctica utiliza mediciones de sombra realizadas durante el eclipse, un modelo aproximado, y un poco de geometría para obtener un resultado aproximado de la distancia de la luna. En la segunda parte de la práctica, construiremos un aparato a partir de materiales simples y lo usaremos para medir el tamaño angular del sol. Combinaremos esto con las medidas de la sombra y conceptos de geometría más complejos para obtener un resultado más preciso de la distancia de la luna, y una estimación de su tamaño.

2. Primer método: el modelo de sombra cilíndrica

Recuerda, de la primera actividad "Observación de un eclipse de luna", cómo tiene lugar un eclipse lunar cuando la luna pasa por la sombra cónica de la tierra.

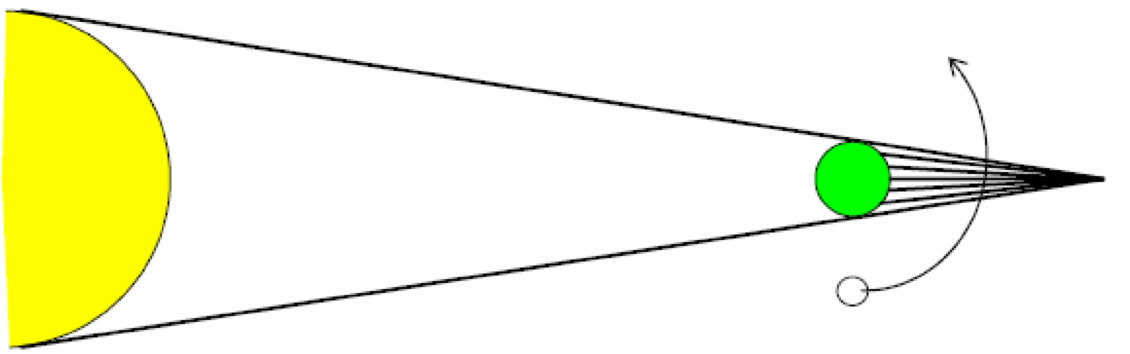


Fig 1. Geometría básica de un eclipse lunar.

Ahora sabemos (y los antiguos griegos lo sabían también) que el sol está mucho más lejos de la tierra de lo que se indica en este simple diagrama. Si movemos el sol hacia la izquierda, la sombra cónica de la tierra se alarga y en nuestra figura los bordes de la sombra se hacen más claramente paralelos:

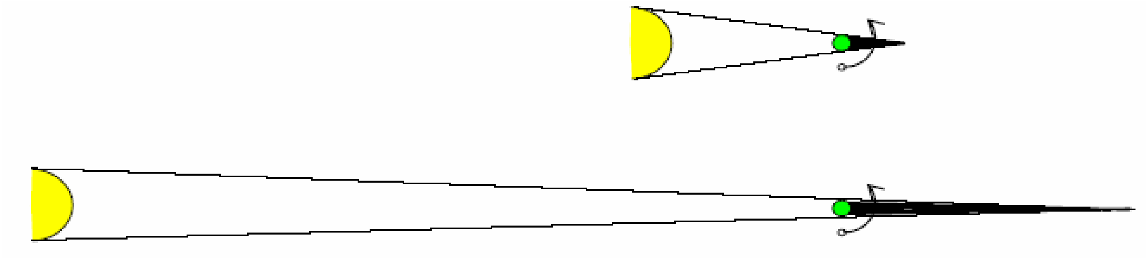
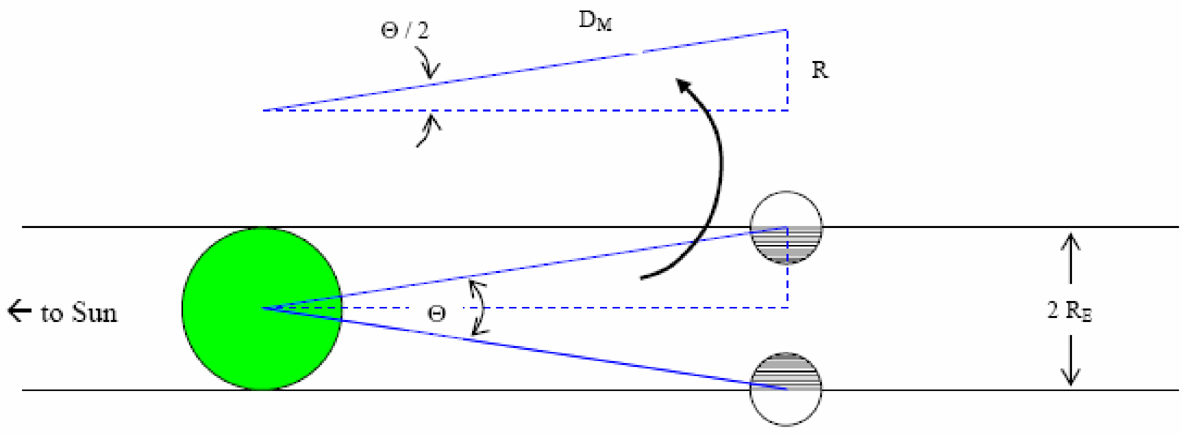


Fig 2. Efecto sobre la geometría de la sombra al colocar el sol a una mayor distancia.

Para el modelo de sombra cilíndrica, asumimos que el sol está a una distancia infinita. Así la sombra de la tierra se convierte en un cilindro, del mismo tamaño que la tierra, que se extiende indefinidamente en el espacio. Este es un modelo aproximado con el uso de una geometría muy simple. Si conocemos el ángulo Θ que la sombra hace por donde la luna la cruza, podemos determinar la distancia a la luna D_M en unidades de radio terrestre R_E :

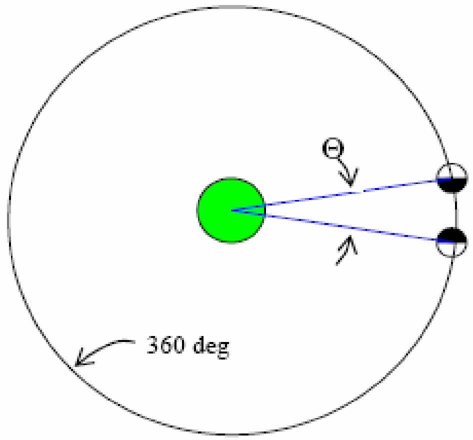


$R_E / D_M = \text{sen}\,[\Theta / 2]$ por lo tanto $D_M = R_E / \text{sen}\,[\Theta / 2]$

Fig. 3. Geometría y fórmula para determinar la distancia de la luna con el modelo de sombra cilíndrica.

¿Cómo podemos medir el ángulo Θ ? No podemos ver la propia sombra extendiéndose en el espacio, y no podemos ver la sombra en la luna en las dos posiciones a la vez que se muestran en la figura 3 .

Lo que podemos hacer es medir cuanto tiempo tarda la luna en pasar por la sombra de la tierra. La luna gira completamente alrededor de la tierra, configurando un ángulo de 360 grados, en un mes lunar de 27.322 días[1] . Así pues el tiempo que tarda en pasar por la sombra **Ts**, comparado con los 27.322 días, es equivalente al tamaño angular de la sombra comparado con los 360 grados:



$$\frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{27.322\ días}} = \frac{\mathbf{\Theta}}{\mathbf{360^{o}}}$$

$$\mathbf{\Theta\ (grados) = 360 \times [\ T_S / 27.322\ días\ ]}$$

Fig 4. Relación entre el tamaño angular de la sombra Θ y el tiempo **Ts** que la luna tarda en pasar por la sombra .

Para esta parte de la actividad, mediremos el tiempo **T_S** que la luna tarda en cruzar la sombra de la tierra, utilizaremos este dato para determinar el ángulo Θ , y luego usaremos este último valor para obtener la distancia de la luna medida en unidades de radio terrestre. Podemos ver a partir de las figuras 3 y 4 que necesitamos anotar el tiempo cuando la sombra umbral está cruzando justo el centro de la luna, cuando la luna entra y sale de la umbra. Esto requiere una observación cuidadosa según progresa el eclipse para determinar los momentos **T_1** y **T_2** ilustrados en la figura 5.

1 Los griegos calcularon la duración del mes lunar a partir de cuidadosas observaciones a lo largo de los años, y utilizando las largas series de registros anotados desde los Babilonios. Dado que nosotros no tenemos tanto tiempo (y probablemente no conozcamos ningún Babilonio) vamos a tomar este dato de Hiparco.

Anota la hora **T2** Anota la hora **T1**

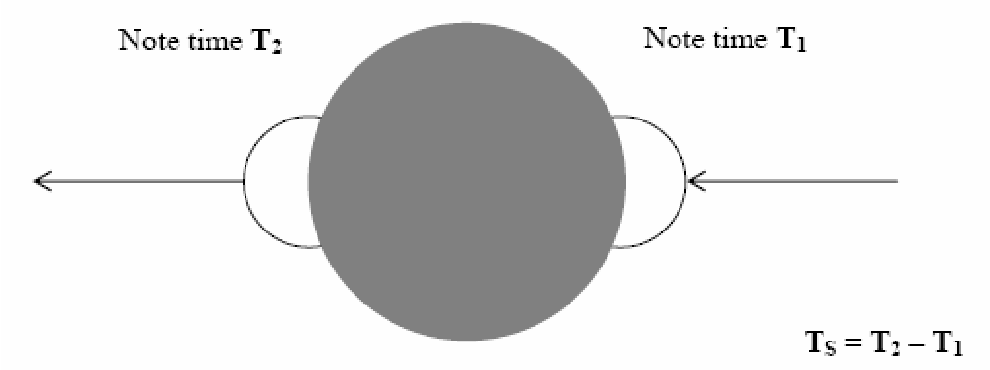


Fig. 5. Cronometrando el cruce de la sombra.

Si supiéramos el tamaño de la tierra, entonces podríamos obtener la distancia de la luna en unidades absolutas (millas o kilómetros). Aristarco no tenía un valor óptimo del tamaño de la tierra, pero Hiparco lo tenía , gracias al geógrafo Eratóstenes (c. 230 AC). Eratóstenes determinó la diferencia de latitud, y la distancia sobre el suelo, entre dos ciudades de Egipto que estaban situadas en un mismo meridiano. Esto le informó de la equivalencia entre un grado de latitud y la distancia. La circunferencia de la tierra es de 360 grados, o 360 veces esta distancia, y a partir de esto obtuvo el radio de la tierra en unidades absolutas. Hiparco utilizó luego este dato para determinar la distancia de la luna.

Al igual que Hiparco, usaremos información elaborada por otras personas para finalizar nuestros cálculos.
Con un mapa de nuestro estado, leeremos la diferencia de latitud entre dos ciudades situadas en un mismo meridiano, y la distancia entre ellas en millas o kilómetros. A partir de esto calcularemos el radio de la tierra y la distancia a la luna.

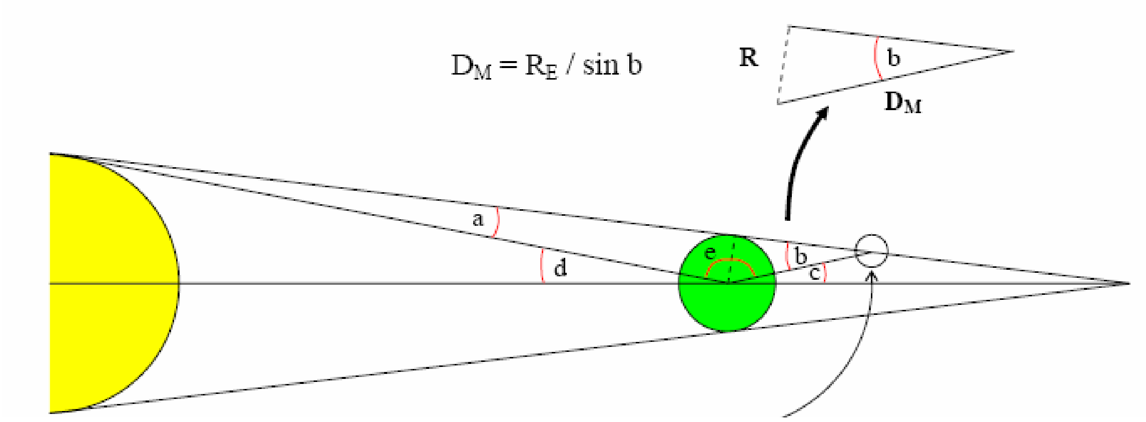
El registro de observación y la hoja de cálculo para esta parte de la actividad están al final de este artículo. Recuerda que al principio asumimos una simplificación – que la sombra de la tierra es un cilindro, y no un cono – por eso nuestro resultado será sólo aproximado. ¿Puedes identificar algo más que estemos asumiendo como verdadero al usar este modelo?

3. Segundo método: modelo de sombra cónica

En esta sección, mejoraremos la precisión de nuestra medida de la distancia, y también obtendremos el tamaño de la luna comenzando con una imagen más precisa de la geometría – un mejor modelo. También construiremos un aparato simple y lo usaremos durante el día para realizar otras medidas que son necesarias. Así es como funciona la ciencia: un mejor modelo requiere más información para ser útil.

Utilizaremos la misma imagen geométrica que usó Hiparco. Estudia con cuidado la figura 6 y sus ecuaciones y asegúrate de que las entiendes. Los tamaños de los objetos y las distancias entre ellas no están a escala. Esto es así para hacer más fácil la visualización de los ángulos ($\angle$) que usaremos.

$D_M = R_E / \text{sen } b$



$\angle a + \angle b + \angle e = 180^o$; $\angle c + \angle d + \angle e = 180^o$

por tanto

$\angle a + \angle b = \angle c + \angle d$

y

$\angle b = \angle c + \angle d - \angle a$

Fig. 6. Ecuaciones y geometría para el modelo de sombra cónica.

Este modelo es más preciso porque incluye el hecho de que la sombra de la tierra es un cono. En primer lugar mira en la parte superior derecha de la figura 6. Aquí la parte del modelo que incluye el ángulo **b** ha sido agrandada . Dos de los lados de este triángulo son el radio de la tierra **R_E** y la distancia a la luna **D_M**. Si podemos determinar el ángulo **b** entonces podemos calcular la distancia a la luna, tal y como hicimos antes.

Piensa en las ecuaciones entre ángulos. Los ángulos **a, b** y **e** son igual a 180 grados porque forman un triángulo. Los ángulos **c, d,** y **e** son igual a 180 grados porque forman una línea recta. Un poco de álgebra muestra cómo obtener el ángulo **b** a partir de los tres ángulos. No es obvio sólo mirando la figura.

Ahora piensa en los ángulos. El ángulo **c** es la mitad del tamaño angular de la sombra de la tierra por donde la luna la cruza – es el mismo ángulo $\Theta/2$,de nuestro primer modelo, que nosotros determinamos cronometrando la sombra umbral durante el eclipse. Por lo tanto ya sabemos cómo determinarlo. El ángulo **a** depende de la distancia al sol. Cuanto más lejos esté el sol, menor se hace este ángulo. Observa que el ángulo **a** *no depende* de lo grande que sea el sol, sólo de lo lejos que está. Finalmente, el ángulo **d** es la mitad del tamaño angular del sol – lo grande que parece un ángulo en el cielo.

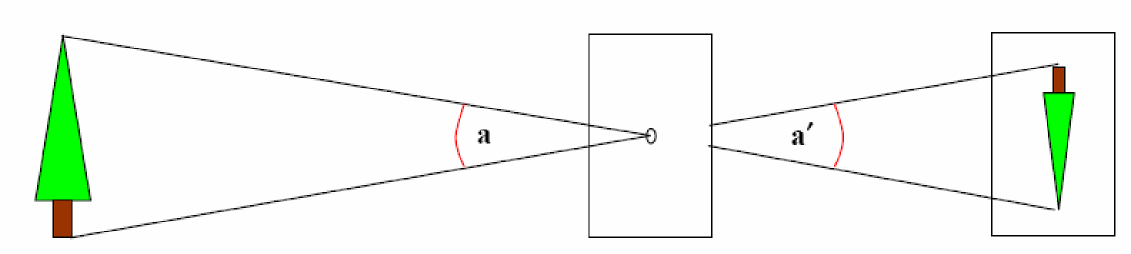
Sabemos que el sol está muy lejos. También sabemos que no es sólo un puntito brillante en el cielo; tiene un tamaño que nos permite verlo fácilmente, por ejemplo mirando al sol a través de nubes delgadas. Por ello, ahora vamos a hacer una aproximación, como hizo Hiparco: este ángulo **a** es mucho más pequeño que los otros ángulos que lo podemos despreciar (asumamos que es cero). Entonces tenemos

$$\angle \mathbf{b} \approx \angle \mathbf{c} + \angle \mathbf{d} \qquad (\text{ ya que } \angle \mathbf{a} \approx \mathbf{0})$$

Así pues tenemos que medir el tamaño angular del sol y tomar la mitad para obtener el ángulo **d**. Luego usamos este dato y el valor del ángulo **c,** determinado cronometrando la sombra umbral, para obtener el ángulo **b** y un valor mejorado de la distancia de la luna.

4. Medición del sol con una cámara estenopeica

Para medir el tamaño angular del sol vamos a hacer y usar una cámara estenopeica . Este es un aparato simple que sirve para formar una imagen de objetos distantes sin lentes o espejos. La idea básica se basa en el hecho de que la luz viaja en línea recta. La figura 7 muestra cómo funciona.



objeto distante   cartulina con agujero   imagen del objeto distante

Fig 7. Principio de la cámara estenopeica. Los ángulos **a** y **a’** son iguales.

El pequeño agujero en una cartulina opaca asegura que la luz procedente de un punto del objeto sólo puede ir a un solo sitio de una pantalla situada detrás, formando así una imagen que podemos medir. Un hecho clave para nuestro experimento es que el tamaño angular de la imagen es igual que el tamaño angular del objeto. Por lo tanto usaremos una cámara estenopeica para crear una imagen del sol, medirlo, y descubrir su tamaño angular.

Para construir la cámara, necesitamos: dos cajitas del tamaño de cajas de zapatos, un tablón o palo de cuatro a seis pies de largo (2 metros), un trocito de papel de aluminio, un trozo de papel blanco, una regla milimetrada, tijeras y cinta adhesiva. Las cajas se unirán al tablón en cada extremo con la parte de arriba abierta mirándose una a otra. Cuanto mayor sea el tablón mayor será la imagen que a su vez será más fácil de medir.

Seis pies (dos metros) es el tablero más largo de más fácil manejo. Pero primero necesitamos crear el agujerito y la pantalla.

La figura 8 muestra los pasos para hacer el agujerito y la pantalla. Para el agujero, comienza haciendo un orificio cuadrado de una pulgada (1 pulgada = 2.54 cm.) en el centro del fondo de una caja. Este no tiene por que ser muy preciso. A continuación, corta un cuadrado de papel de aluminio de unas dos pulgadas de lado (5 cm.). Utiliza algo de punta redonda y afilada para hacer un pequeño agujero en el centro del cuadrado de aluminio Esta herramienta podría ser un alfiler o una aguja, la punta de un lápiz muy afilado, o la punta metálica de un compás. El agujero debería ser de un milímetro de diámetro, muy redondo, de bordes limpios y precisos. Tal vez tengas que hacer varios agujeros en diferentes trozos de aluminio para obtener uno lo suficientemente bueno. Cuando lo tengas, mide su diámetro con la regla y anota este valor en la hoja de cálculo. Una lupa te ayuda en esta tarea. Finalmente, pega el aluminio en el orificio de la caja, centrando el agujero a ojo.

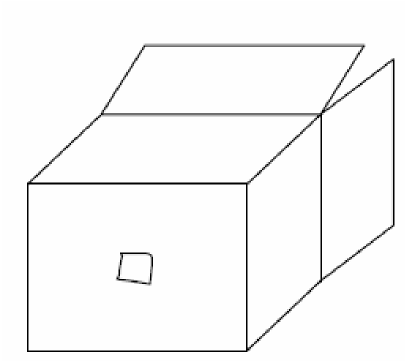
Fabricar la pantalla es más fácil. Corta un trozo cuadrado de papel blanco de unas dos pulgadas (5 cm). Dibuja una línea por la mitad. Usando la regla, haz una marca en la línea cada 5 milímetros. Pega el papel en el fondo interior de la otra caja, en el centro.

Ahora une las dos cajas al tablero o palo de modo que la pantalla esté frente al agujero. Los lados de la caja alrededor de la pantalla ayudan a proteger la imagen de la luz ambiental y hacen que se vea más fácilmente. Usa la regla para medir la distancia entre el agujero y la pantalla a lo largo del tablero. Anota este valor en la hoja de cálculo. La figura 9 ilustra estos pasos.

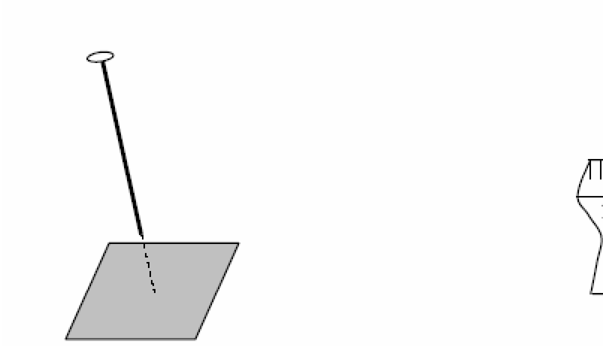
La figura 10 enseña cómo usar la cámara. Para hacer la medida, necesitamos tener proyectada en la pantalla la imagen estenopeica del sol . En un día claro, saca la cámara al exterior y dirige el agujero hacia el sol. Muévelo de modo que la sombra de la caja superior (el agujero) caiga en la caja de abajo (pantalla). Deberías ver la imagen solar en algún punto de la caja inferior. Mueve la cámara para centrar la imagen en la pantalla, y mide su diámetro con la regla casera, calculando entre las marcas hasta el milímetro más cercano (o con más precisión si crees que puedes). Ayuda mucho apoyar el tablón contra algo – el respaldo de una silla, una valla, un cubo de basura – y dejar la pantalla en el suelo, luego mueve la parte de abajo con cuidado hasta que se centre la imagen en la escala. Anota el diámetro de la imagen solar en la hoja de cálculo. Verás la imagen moverse por la escala incluso con la cámara quieta. ¿Sabes por qué ocurre esto?

Ahora hay que hacer una pequeña corrección: resta el diámetro del agujero al diámetro de la imagen. Esto da el diámetro de la imagen que mediríamos si el agujero fuera infinitamente pequeño. ¿Ves por qué es esto necesario?

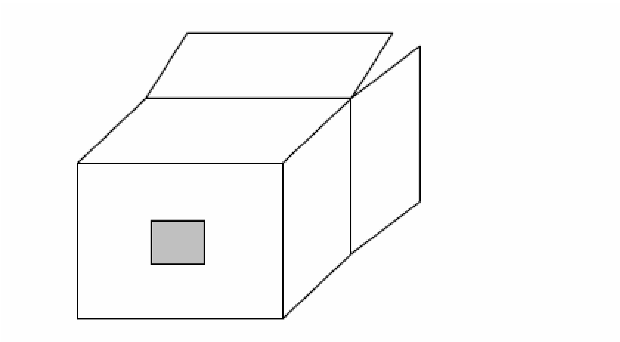
Ahora tenemos dos mediciones de distancias, el diámetro (corregido) de la imagen solar, y la distancia desde el agujero a la pantalla. Estas distancias forman un ángulo, el tamaño angular del sol, que podemos calcular. Todo ello nos da lo que necesitamos para acabar el cálculo mejorado de la distancia de la luna, siguiendo la hoja de cálculo. ¿Cómo es el nuevo resultado comparado con el resultado original?



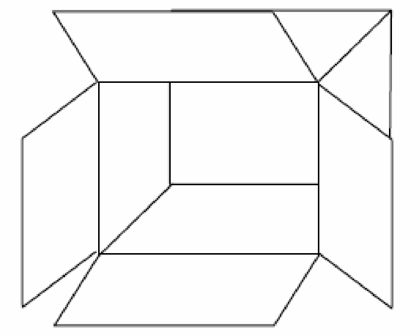
1. Haz una abertura en una caja pequeña



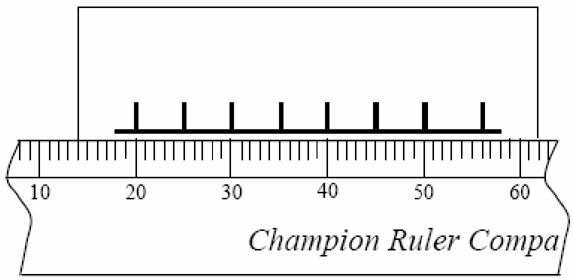
2. Haz un agujero en un trozo de papel de aluminio.



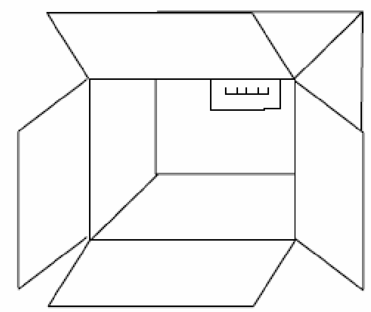
3. Pega el papel con agujero en el orificio



4. Abre una caja similar



5. Copia una escala milimétrica en un trozo de papel.



6. Pega la escala de papel en el fondo de la segunda caja.

Fig. 8. Pasos en la fabricación del agujero y la pantalla milimetrada para la cáma**ra** **e**stenopeica

Agujero aquí Mide esta distancia en milímetros Pantalla milimetrada en el interior de la caja

Fig. 9. Montaje de la cámara estenopeica

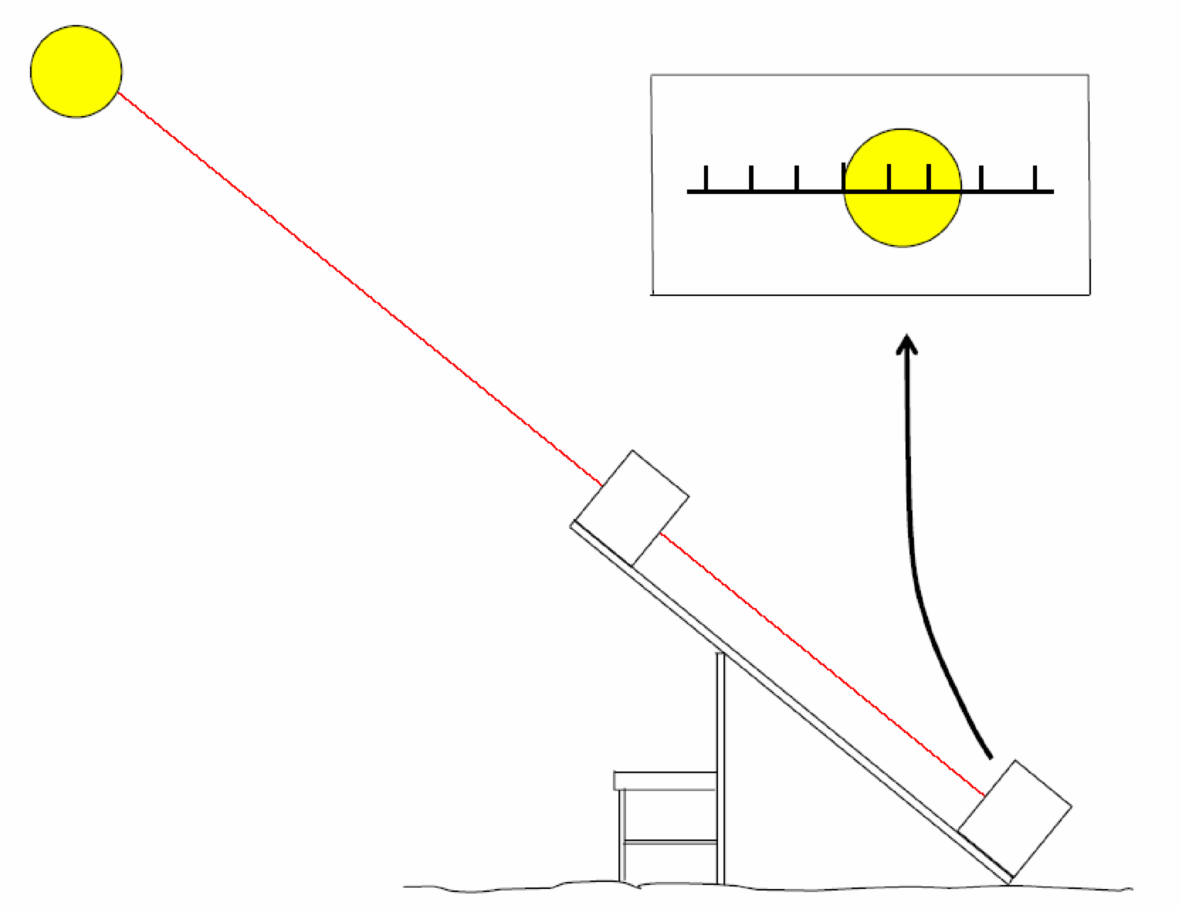
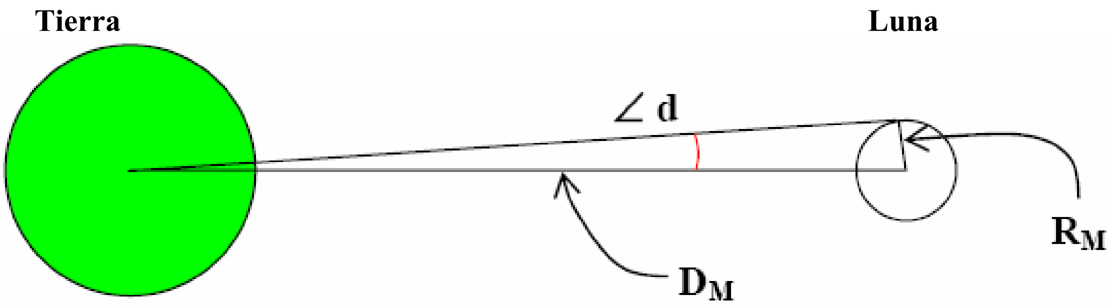


Fig. 10. Utilización de la cámara estenopeica. La regla interior, arriba a la derecha, muestra cómo usar la escala para medir el tamaño de la imagen solar. Puedes calcularlo redondeando al milímetro más cercano.

4. Determinación del tamaño de la luna

Como cálculo final, podemos determinar el tamaño (radio) de la luna usando lo que hemos medido y calculado. Esto sucede debido a un hecho fascinante de la naturaleza: el tamaño angular de la luna es el mismo que el tamaño angular del sol. No hay ninguna razón particular por la que esto debiera ser verdad, pero sabemos que lo es por la observación de eclipses de sol. Durante un **eclipse solar** la luna apenas cubre el sol. Si no te sitúas exactamente en el lugar adecuado en la tierra para situarte en la sombra, verás una pequeña porción del sol asomándose en algún extremo.

La geometría y ecuación para calcular el radio de la luna se muestra en la figura 11. El ángulo **d** es el mismo que el de la Figura 6 para el sol. La distancia **Dm** ya la hemos calculado. Por lo tanto el radio de la luna **Rm** es fácil de encontrar. Ya calculaste el radio de la tierra **Rr**. ¿Cómo de grande es la luna comparada con la tierra?



$R_M / D_M = \text{sen } d$ **por lo tanto** $R_M = D_m \times \text{sen } d$

Fig. 11. Cálculo del radio de la luna.

Hoja de cálculo para el método de sombra cilíndrica

Situación y datos de las observaciones del eclipse: ________________________________

Momento T_1 en que la umbra cruzó el centro de la luna: ____________

Momento T_2 en que la umbra cruzó el centro de la luna: ____________

Diferencia de tiempos $T_s = T_2 - T_1$, en minutos: ____________

Mes lunar L_M en minutos, 27.322 días x 24 horas/día x 60 minutos/hora: ____________

Tamaño angular de la sombra de la tierra Θ = **360 grad x [T_s / L_M]** : ____________

Θ / 2 (grados): ________ Sen [Θ / 2] : ________ 1 / sin [Θ / 2] : ____________

Distancia de la luna D_M en unidades del radio de la tierra, $D_M = R_E \times \{ 1 / \sin [\Theta / 2] \}$: ____________

Latitud L_N de la ciudad al norte en grados, leerlo en el mapa: ____________

Latitud L_S de la ciudad al sur en grados, leerlo en el mapa : ____________

Diferencia de latitud en grados $L_N - L_S$: ____________

Distancia **d** entre las dos ciudades en millas o kilómetros, leerlo en el mapa: ____________

Distancia por grado de latitud, $d / [L_N - L_S]$: ____________

Circunferencia de la Tierra, C_E = **360 grados x { d / [L_N - L_S] }** : ____________

Radio de la Tierra, $R_E = C_E / 2\pi$: ____________

Distancia de la Luna en millas o kilómetros, $D_M \times R_E$: ____________

¿Puedes pensar en otra suposición o aproximación que hayamos hecho en este experimento?

____

Hoja de cálculo para el método de sombra cónica

El ángulo **c** = ángulo Θ / **2** a partir de la primera hoja de cálculo: ____________

El radio de la Tierra $\mathbf{R_E}$, en millas o kilómetros, a partir de la primera hoja de cálculo: _____

Situación, fecha, y hora de las observaciones con la cámara estenopeica: ________________
____

Diámetro del agujero **p** en milímetros: ____________

Distancia del agujero a la pantalla **L** en milímetros: ____________

Diámetro de la imagen solar **s** en milímetros: ____________

Diámetro de la imagen solar corregido **S = s – p** en milímetros: ____________

Diámetro angular **D** del sol: sen **D** = **S / L** : __________ **D** (grados): ____________

¿Por qué se mueve la imagen solar por la pantalla? ____________________________

Ángulo **d** = **D / 2** : ____________

Ángulo **b** = ángulo **c** + ángulo **d** : ____________

sen **b** : __________________ 1 / sen **b** : ____________

Distancia de la luna $\mathbf{D_M = R_E \times \{ 1 / \sin b \}}$: ____________

Compara este valor para $\mathbf{D_M}$ con tu primer resultado: __________________________

Ángulo **d** : ____________ sin **d** : ____________

Radio de la luna, $\mathbf{R_M = D_M \times \sin d}$: ____________

Compara el tamaño de la luna y el tamaño de la tierra: __________________________